Διακριτός Μετρικός Χώρος - Τυπολόγιο

• Έστω ένα μη κενό σύνολο X και έστω μία απεικόνιση $d_0 \colon X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$d_0(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad x \neq y \\ 0 & , \quad x = y \end{cases},$$

Η d_0 εύκολα διαπιστώνεται ότι ορίζει μία μετρική επί του X, η οποία λέγεται **διακριτή** μετρική, και ο μετρικός χώρος (X, d_0) ονομάζεται **διακριτός** μετρικός χώρος.

Από αυτό το σημείο και έπειτα με X θα συμβολίζουμε το διακριτό μετρικό χώρο.

• Αν A είναι ένα υποσύνολο του X τότε $\operatorname{diam}(A) = 1$, αν το A έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία και $\operatorname{diam}(A) = 0$, αν το A μονοστοιχειακό σύνολο. Συνεπώς, κάθε υποσύνολο του X είναι πάντα φραγμένο.

• Τα σύνολα $B_{d_0}(x_0, \epsilon) = \{x \in X : d_0(x, x_0) < \epsilon\}, \hat{B}_{d_0}(x_0, \epsilon) = \{x \in X : d_0(x, x_0) \leq \epsilon\}$ και $S_{d_o}(x_0, \epsilon) = \{x \in X : d_0(x, x_0) = \epsilon\}$ λαμβάνουν τις εξής μορφές:

$$B_{d_0}(x_0,\epsilon) = \begin{cases} \{x_0\} & , \quad \epsilon \leq 1 \\ X & , \quad \epsilon > 1 \end{cases}, \ \hat{B}_{d_0}(x_0,\epsilon) = \begin{cases} \{x_0\} & , \quad \epsilon < 1 \\ X & , \quad \epsilon \geq 1 \end{cases}, \ S_{d_0}(x_0,\epsilon) = \begin{cases} \emptyset & , \quad \epsilon \neq 1 \\ X \setminus \{x_0\} & , \quad \epsilon = 1 \end{cases},$$

Άμεση, συνέπεια αυτού είναι ότι η ανοιχή μπάλα $B_{d_0}(x_0, \epsilon)$ για $\epsilon = 1$ έχει διάμετρο γνήσια μικρότερη από $2 \cdot \epsilon$.

• Κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων του X που είναι d_0-συγκλίνουσα προς κάποιο $x_0 \in X$, είναι τελικά σταθερή και ίση με x_0. Συνεπώς, οι συγλίνουσες ακολουθίες στο διακριτό μετρικό χώρο και οι τελικά σταθερές ακολουθίες αυτού ταυτίζονται (κάτι το οποίο δεν ισχύει σε Ευκλείδειο μετρικό χώρο).

• Το θεώρημα των Bolzano-Weierstrass δεν ισχύει σε διακριτό μετρικό χώρο, πχ αν $(\mathbb{N}, d_0)$ διακριτός και $x_n = n, \ n \in \mathbb{N}$ τότε η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη στον $(\mathbb{N}, d_0)$ χωρίς όμως συγκλίνουσα υπακολουθία, γιατί αν είχε τότε οι όροι της υπακολουθίες θα απείχαν τελικά απόσταση ίση με 1, επειδή $d_0(x_n, x_m) = 1, \ \forall n \neq m$ και συνεπώς, η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν θα ήταν βασική (ή Cauchy) ακολουθία στο $(\mathbb{N}, d_0)$ και κατά συνέπεια όχι συγκλίνουσα σε αυτόν, πράγμα άτοπο.

• Έστω ένας μετρικός χώρος (Y, d). Τότε, κάθε συνάρτηση $f \colon X \to Y$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Όμως, όχι απαραίτητα Lipschitz. Π.χ αν (Y, d) μη φραγμένος και η f είναι η ταυτοτική $f(x) = x, x \in X$, η f δεν είναι Lipchitz διότι αν ήταν θα υπήρχε $K > 0$ ώστε

$$d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq K d_0(x,y) = K \cdot 1 = K, \ \forall \ x \neq y, x, y \in X.$$

Άρα, ο μετρικός χώρος (Y, d) θα ήταν φραγμένος (άτοπο)

• Κάθε υποσύνολο A του X είναι ανοιχτό και κλειστό ταυτόχρονα. Εφόσον λοιπόν για κάθε A υποσύνολο του X, έχουμε $\overline{A} = A$, προκύπτει ότι δεν υπάρχει γνήσιο υποσύνολο στον διακριτό το οποίο να είναι πυκνό σε αυτόν. Επίσης, το σύνορο του A είναι το κενό σύνολο.

• Αν $A \subseteq X$, κάθε σημείο του A είναι μεμονωμένο σημείο του (Δηλαδή, δεν υπάρχουν σημεία συσσώρευσης σε κανένα υποσύνολο του X).

Κωνσταντίνος Δήμογλου Μαθηματικός

• Στον $\mathbb{R}$ η εκλείδεια μετρική και η διακριτή μετρική δεν είναι ισοδύναμες. Εντούτοις, στον υπόχωρο $(\mathbb{Z}, |\cdot|_{\mathbb{Z}})$ του ευκλειδείου χώρου $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ η διακριτή μετρική στο $\mathbb{Z}$ είναι ισοδύναμη με τη σχετική μετρική $|\cdot|_{\mathbb{Z}}$.

• Ο X είναι πάντα πλήρης μετρικός χώρος. Συνεπώς, οι βασικές ακολουθίες στο διακριτό μετρικό χώρο και οι συγκλινουσες ακολουθίες αυτού ταυτίζονται. Επίσης, όλα τα υποσύνολα του X είναι πλήρη.

• Ο X είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν το X είναι (το πολύ) αριθμήσιμο σύνολο.

• Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) X είναι συμπαγής

(ii) X είναι ολικά φραγμένος

(iii) X είναι πεπερασμένος.

• Αν ο X περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, τότε δεν είναι συνεκτικός μετρικός χώρος.

• Αν (Y, d) ένας συνεκτικός μετρικός χώρος και $f : Y \to X$ συνεχής, τότε η f είναι σταθερή.

Κωνσταντίνος Δήμογλου Μαθηματικός